

Die Integralrechnung

Eine Funktion F , für deren Ableitung $F'(x) = f(x)$ gilt, heißt eine Stammfunktion der Funktion f .

Bemerkung:

Die Menge aller Stammfunktionen von f ist gegeben durch $F(x) + C$.

Schreibweise:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (\text{unbestimmtes Integral})$$

Rechenregeln:

$$1) \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$2) \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$3) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{"Potenzregel"})$$

Die Potenzregel gilt auch für negative Exponenten mit Ausnahme von $n = -1$.

$$4) \int x^{-2} dx = -1 x^{-1} + C$$

$$5) \int 1 dx = x + C$$

$$6) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$7) \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

Aufgaben:

1) $\int \left(-\frac{1}{3}x^2\right) dx$ ☐

2) $\int (6x^3 - 15x^2 + 6x - 2) dx$ ☐

3) $\int [(3x^2 + 4x)(2x + 1)] dx$ ☒

4) $\int (ax^2 - 3ax + 2) dx$ ☒

5) $\int (2x + 1)^4 dx$ ☒

6) $\int (ax^2 - 3ax + 2) da$ ☒

7) $\int (x^2t - 3t^2) dt$ ☒

Lösungen:

$$1) \int \left(-\frac{1}{3}x^2\right) dx = -\frac{1}{9}x^3 + C$$

$$2) \int (6x^3 - 15x^2 + 6x - 2) dx = \frac{3}{2}x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + C$$

$$3) \int [(3x^2 + 4x)(2x + 1)] dx = \int (6x^3 + 11x^2 + 4x) dx = \\ = \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

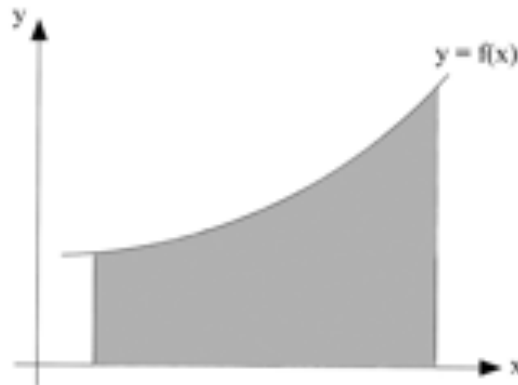
$$4) \int (ax^2 - 3ax + 2) dx = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2x + C$$

$$5) \int (2x+1)^4 dx = \frac{1}{5}(2x+1)^5 \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C$$

$$6) \int (ax^2 - 3ax + 2) da = x^2 \cdot \frac{1}{2}a^2 - 3x \cdot \frac{1}{2}a^2 + 2a + C$$

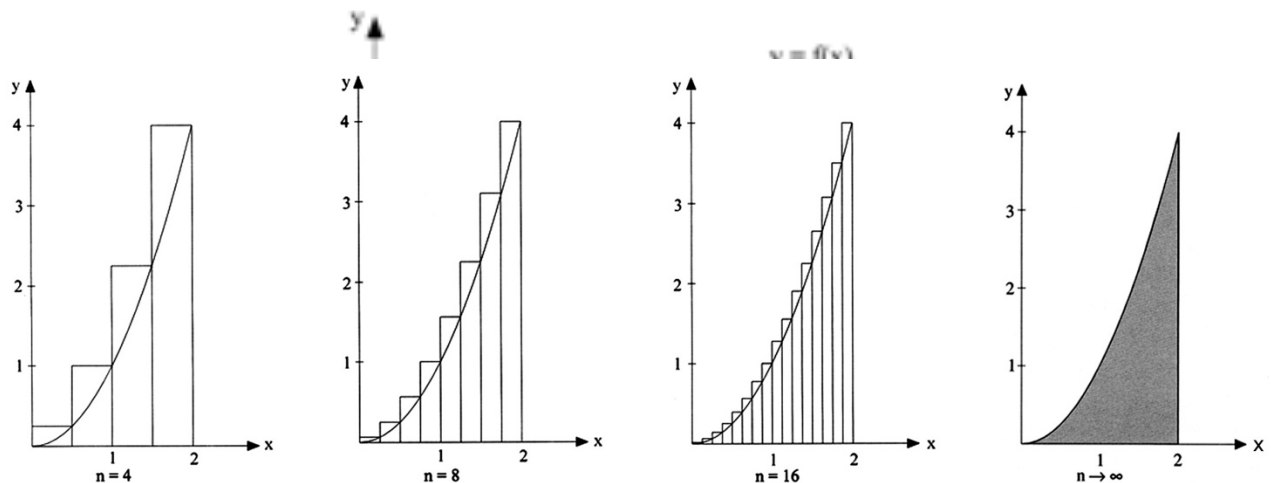
$$7) \int (x^2t - 3t^2) dt = x^2 \cdot \frac{1}{2}t^2 - 3 \cdot \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{2}x^2t^2 - t^3 + C$$

Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen



Lösungsansatz:

Die gesuchte Fläche in Rechtecksflächen zerlegen und dann die Summe der Rechtecksflächen berechnen (Berechnung der „Obersumme“ und „Untersumme“).



Verbesserung: Erhöhung der Anzahl der Rechtecksflächen

Folgerung:

Die „Obersumme“ und die „Untersumme“ der Rechtecksflächen konvergiert gegen einen gemeinsamen Grenzwert, den man auch als bestimmtes Integral bezeichnet.

Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx$$

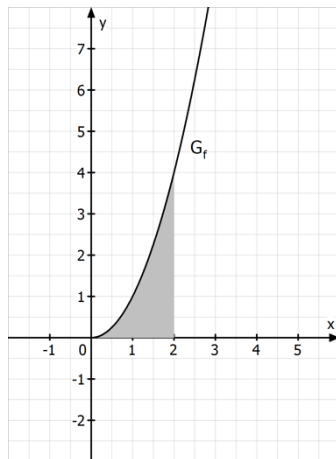
$\int$: Integralzeichen a: untere Integrationsgrenze b: obere Integrationsgrenze

f: Integrandenfunktion x: Integrationsvariable

Anschauliche Bedeutung des bestimmten Integrals:

Das bestimmte Integral stimmt mit der Maßzahl des Flächeninhalts des entsprechend begrenzten Flächenstücks unterhalb des Funktionsgraphen G_f überein, d.h. mit Hilfe des bestimmten Integrals können jetzt auch die Maßzahlen der Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen berechnet werden.

Beispiel: $f(x) = x^2$



$$A = \int_0^2 x^2 dx$$

Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe einer Stammfunktion

Ist F eine (beliebige) Stammfunktion von f , dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3}$$

Rechenregeln:

$$1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$4) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$5) \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \text{ für } b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq b \leq c$$

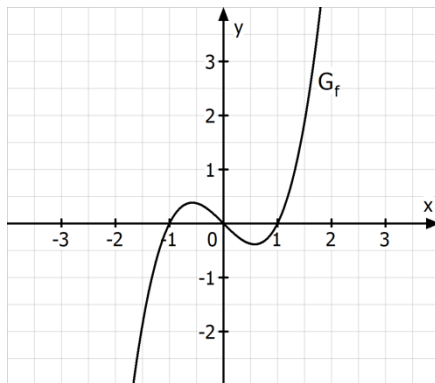
Aufgaben:

1)

$$\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = 0$$

Skizze des Graphen:

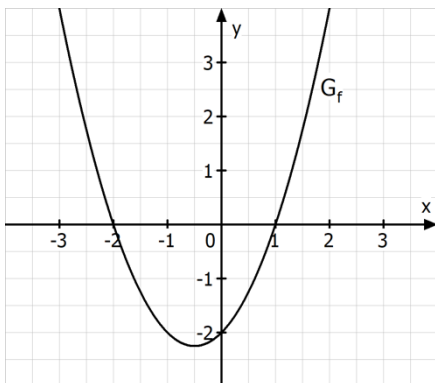


2)

$$\int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \right) = -1\frac{1}{6} - 3\frac{1}{3} = -4\frac{1}{2}$$

Skizze des Graphen:

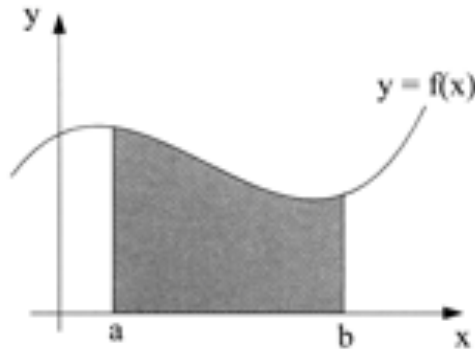


Folgerung:

Der Wert des bestimmten Integrals stellt eine Flächenbilanz dar.

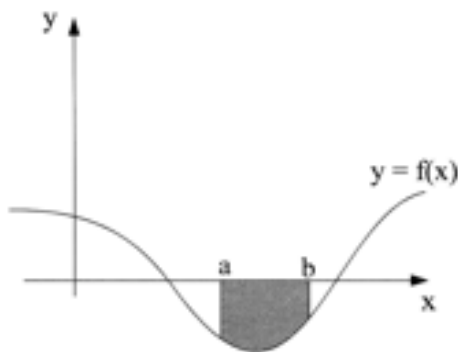
Berechnung der Maßzahl von Flächeninhalten

1) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über $[a;b]$ oberhalb der x-Achse:



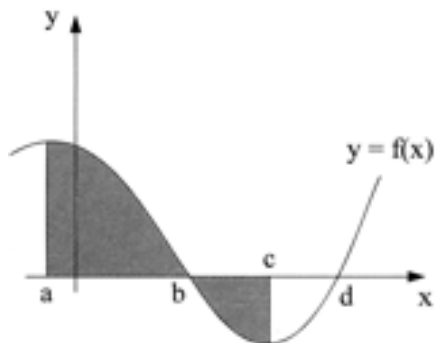
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

2) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über $[a;b]$ unterhalb der x-Achse:



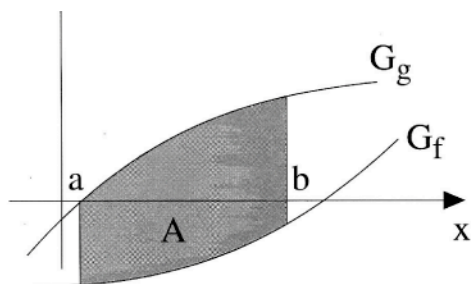
$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

3) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über $[a;c]$ oberhalb und unterhalb der x-Achse:

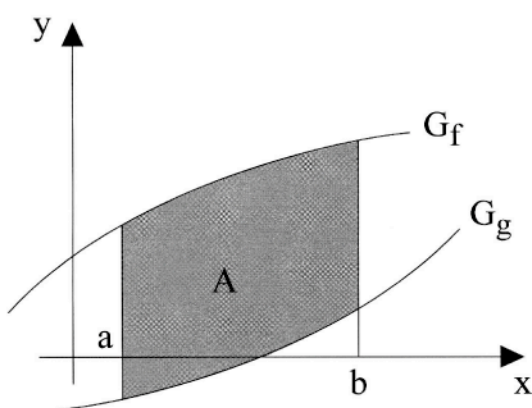


$$A = \int_a^b f(x) dx + \left| \int_b^c f(x) dx \right|$$

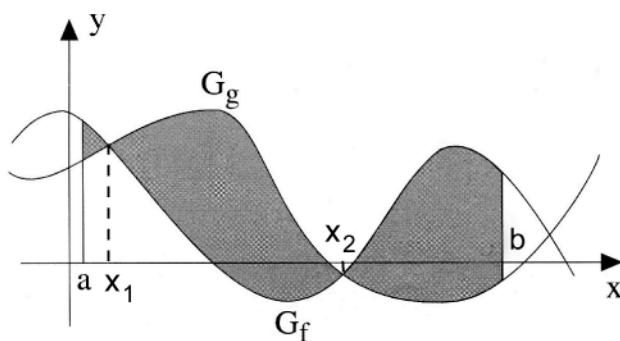
4) Maßzahl des Flächeninhalts von Flächenstücken, die von zwei Graphen begrenzt werden:



$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



$$A = \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{x_2}^b (f(x) - g(x)) dx$$